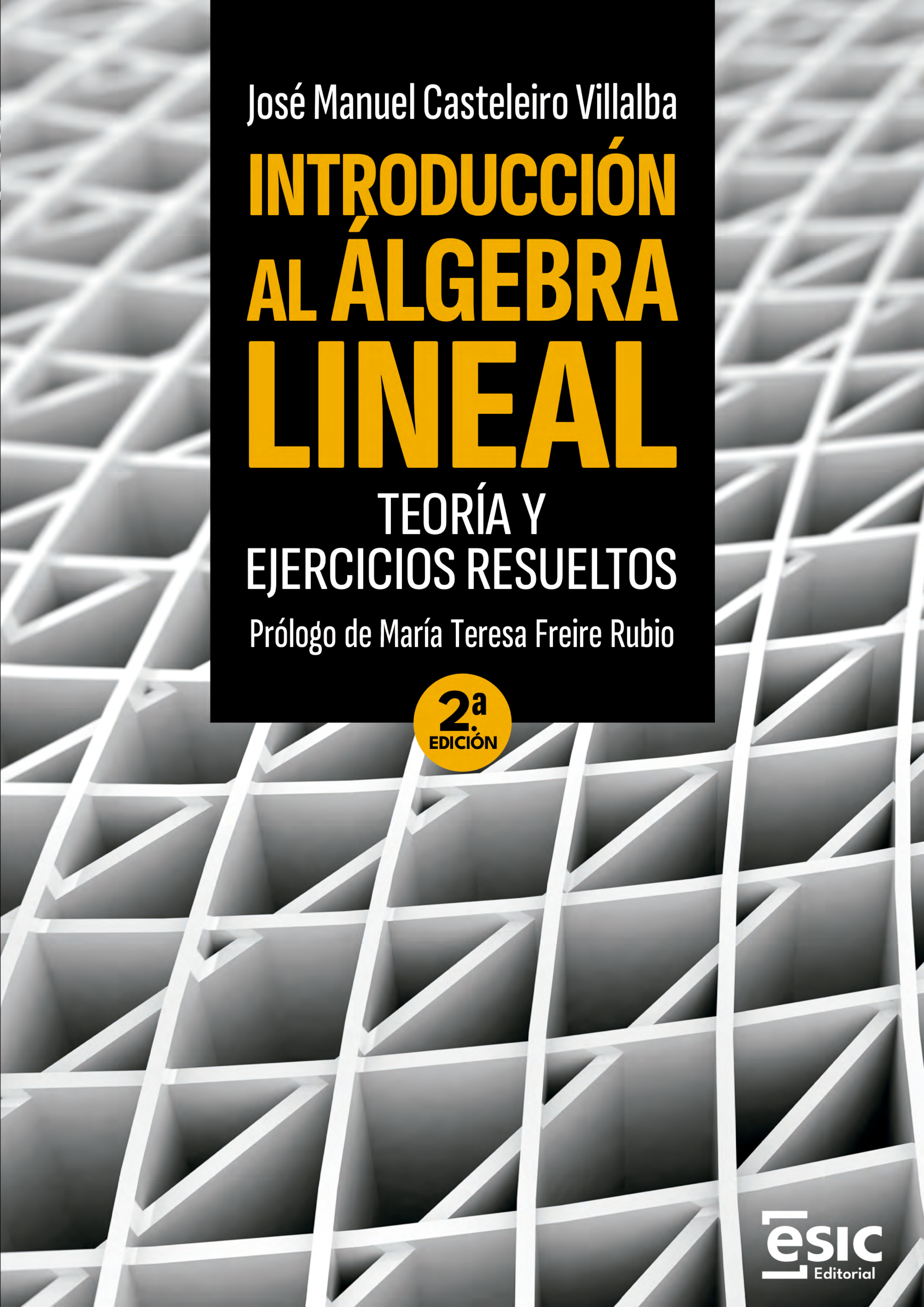

José Manuel Casteleiro Villalba

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

Prólogo de María Teresa Freire Rubio

2.ª EDICIÓN

esic Editorial

Introducción al álgebra lineal

Teoría y ejercicios resueltos

Madrid, 2026

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS
2.ª edición

JOSÉ MANUEL CASTELEIRO VILLALBA

Prólogo de MARÍA TERESA FREIRE RUBIO

ESIC Editorial

Primera edición: diciembre, 2004
Segunda edición: enero, 2026

Introducción al álgebra lineal: Teoría y ejercicios resueltos, 2.ª edición
José Manuel Casteleiro Villalba

Avda. de Valdenigriales, s/n
28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid)
Tel. 91 452 41 00
www.esic.edu/editorial
@EsicEditorial

ISBN: 978-84-1192-237-1
Depósito Legal: M-576-2026

Diseño de cubierta: Zita Moreno Puig
Maquetación: Balloon Comunicación
Lectura: Balloon Comunicación
Impresión: Gráficas Dehon

Un libro de

Impreso en España - *Printed in Spain*
Este libro ha sido impreso con tinta ecológica y papel sostenible.

A mi mujer, Sol Gil y Gómez de Serna

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS DEL AUTOR

Quisiera agradecer a Ramón Arilla, rector de ESIC University, por su apoyo, ayuda y comprensión; a María Teresa Freire, vicepresidenta de ESIC University, por el magnífico prólogo de este libro; y a su gran editorial, ESIC Editorial, por haber hecho posible la edición de esta obra, tanto la presente como su primera edición en 2004.

José Manuel Casteleiro Villalba

PRÓLOGO

La historia del pensamiento matemático es, en gran medida, la historia de una búsqueda constante por comprender las estructuras que subyacen al mundo que habitamos. Dentro de esa búsqueda, el álgebra se ha erigido como una de las áreas más influyentes no solo por su capacidad para generalizar y sistematizar procedimientos aritméticos, sino también por su papel fundamental en el desarrollo de la ciencia moderna. Nació así esta disciplina como una respuesta humana a la necesidad de comprender lo que no se ve. Antes de que existieran las ecuaciones, los números ya contaban historias: cuántos granos almacenar, cuántos pasos dar, cuántas estrellas se podían reconocer en el cielo.

En los campos de la economía, el marketing y la empresa, el álgebra constituye una herramienta sumamente útil para ayudarnos a controlar los procesos de análisis de los mercados, en un mundo cada vez más interrelacionado y globalizado, donde los grandes volúmenes de cifras complican enormemente el control de las operaciones nacionales e internacionales.

El álgebra lineal ocupa un lugar singular en el corazón de las matemáticas modernas y su estudio ocupa un lugar central en la formación universitaria de prácticamente todas las disciplinas científicas y tecnológicas. Su importancia no es un accidente histórico ni una simple tradición académica; por el contrario, surge de su capacidad única para revelar la estructura profunda de los sistemas que modelan nuestro mundo. El álgebra lineal ofrece un marco unificado para comprender fenómenos tan diversos como la dinámica de sistemas físicos, la propagación de señales, la estabilidad de modelos económicos, el análisis de datos y el funcionamiento de algoritmos modernos.

Aprender álgebra lineal suele presentar un desafío característico: la transición desde el pensamiento aritmético y geométrico del nivel preuniversitario hacia una comprensión más abstracta y estructural. Esta dificultad no debe desanimar al estudiante, sino motivarlo. La abstracción es un puente hacia nuevas formas de ver y de pensar, y dominarla abre puertas a áreas avanzadas de las matemáticas y de la ciencia. Por ello, este libro se esfuerza en acompañar al lector a través de esa transición con explicaciones claras, ejemplos cuidadosamente seleccionados y secciones dedicadas a conectar la teoría con problemas reales.

Este libro ha sido concebido con la convicción de que el álgebra lineal debe ser estudiada no solo como un conjunto de técnicas operativas, sino como una teoría coherente que ilumina la estructura de los espacios y las transformaciones que los habitan. No tiene por objeto desarrollar las grandes teorías, ni siquiera ser un libro completo que incluya todos los teoremas relativos al tema, sino simplemente ser un libro para aprender a manejar con cierta soltura las matrices, de forma que constituya un método didáctico para enseñar este tipo de matemáticas de forma fácil y sistemática. Creo importante señalar que es un libro secuencial, por tanto, conviene no avanzar excesivamente si no se tienen bien cimentados los conocimientos anteriores. En definitiva, el texto ha sido concebido con un enfoque pedagógico claro: ir de lo familiar a lo desconocido, de lo concreto a lo abstracto.

A lo largo del texto, se invita al estudiante no solo a aprender métodos, sino a preguntarse por qué funcionan; no solo a resolver ecuaciones, sino a reconocer las estructuras que las gobiernan; no solo a manipular matrices, sino a comprender las transformaciones que representan. Esta actitud, más que cualquier contenido específico, es la que define una auténtica educación universitaria.

Este prólogo no pretende simplemente introducir los temas que se desarrollarán en las siguientes páginas, sino motivar una mirada distinta hacia el álgebra lineal: una mirada que reconozca su belleza, su coherencia interna y su poder expresivo. El lector está a punto de adentrarse en una disciplina que combina arte y razonamiento, abstracción y aplicaciones concretas, rigor y creatividad. El propósito de este libro es que el estudiante logre ver en el álgebra lineal no solo una asignatura obligatoria, sino un lenguaje que amplía su capacidad de entender el mundo.

Ojalá este libro sirva como punto de partida para nuevas preguntas y como puente hacia estudios más avanzados. Si, al finalizar, el lector descubre en el álgebra lineal no un conjunto de reglas, sino un modo de pensar, el objetivo estará cumplido.

María Teresa Freire Rubio

Vicepresidenta de ESIC University

1 MATRICES

1.0 INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente capítulo es dar a conocer una herramienta de cálculo, sumamente útil, para el tratamiento de ecuaciones lineales, además de mostrar los distintos tipos de matrices que se utilizan y su particular operatoria. No hay que confundir una matriz con un determinante, aunque tengan una notación y un aspecto parecido. El término *matriz* fue utilizado por vez primera por el matemático inglés James J. Silvester (1814-1897) para designar una información numérica dispuesta según un conjunto de filas y columnas, mientras que el concepto de determinante, que no es más que un número, fue desarrollado con anterioridad y representa una categoría lógica totalmente diferente. El cálculo matricial tiene un gran abanico de aplicaciones en Física, Ingeniería, Economía, etc.

1.1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

1.1.1 ¿Qué es una matriz?

Una matriz es un ordenamiento rectangular de escalares (números) en filas y columnas, encerrados en un corchete o en un paréntesis. Las matrices de las que vamos a hablar son numéricas o alfanuméricas, es decir, compuestas de números o de números y letras. Simbólicamente se escribirá:

$$A = (A) = [A]$$

Cuando no exista ambigüedad no se utilizará ni el corchete ni el paréntesis, solo letras mayúsculas. En este libro se utilizará la notación entre corchetes. Por extensión las matrices se pueden escribir:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se llama término o elemento de una matriz a cada uno de sus valores. Se representa por a_{ij}, donde el primer subíndice corresponde a la fila y en segundo a la columna donde se halla ubicado.

Ejemplo 1.1. Señalar el término ubicado en la segunda fila y tercera columna (a_{23}) en la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 9a & b \\ b & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El término que ocupa la segunda fila y tercera columna es el *b*.

1.1.2 Orden o dimensión de una matriz

El orden o dimensión de una matriz es el número de filas y columnas que posee. Se representa por *(m, n)* donde *m* es el número de filas y *n* el de columnas.

Ejemplo 1.2. Hallar el orden de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene 3 filas y 5 columnas, luego el orden será (3,5).

1.2 IDENTIDAD DE MATRICES

Dos matrices son idénticas cuando tienen los mismos elementos.

Ejemplo 1.3. Hallar los valores *a, b, c, d, e* y *f* de la matriz *A,* sabiendo que es idéntica a la matriz *B*.

$$A=\begin{bmatrix} 2a+1 & 3e+1 & 2 \\ 2b & f & 5 \\ a-2c & a-d & 8 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Igualando ambas matrices e identificando términos, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} 2a+1 & 3e+1 & 2 \\ 2b & f & 5 \\ a-2c & a-d & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+1=0 \rightarrow a=-\dfrac{1}{2} \\ 2b=3 \rightarrow b=\dfrac{3}{2} \\ a-2c=4 \rightarrow -\dfrac{1}{2}-2c=4 \rightarrow c=-\dfrac{9}{4} \\ 3e+1=4 \rightarrow e=1 \\ f=0 \\ a-d=1 \rightarrow -\dfrac{1}{2}-d=1 \rightarrow d=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1.3 TIPOS DE MATRICES

La nomenclatura de los distintos tipos de matrices es la siguiente:

1.3.1 Matriz rectangular

Es la que tiene distinto número de filas que de columnas:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow Orden\left(m,n\right) \quad (m \neq n)$$

Ejemplo 1.4. Hallar los órdenes de las siguientes matrices rectangulares:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

el orden de la matriz A es (4,2) y el de la matriz B es (3,4).

1.3.2 Matriz fila

Es la matriz rectangular que solo tiene una fila:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad . \quad . \quad . \quad a_{1n}]$$

Esta matriz también se llama vector fila.

Ejemplo 1.5. Hallar el orden de la siguiente matriz fila:

$$\mathrm{A} = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$$

el orden es (1,4), una fila y cuatro columnas.

1.3.3 Matriz columna

Es la matriz rectangular que solo tiene una columna. Se puede escribir de dos formas diferentes, con una llave o con corchetes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} \rightarrow \quad Orden\left(m,1\right)$$

Esta matriz también se llama vector columna.

Ejemplo 1.6. Hallar el orden de la siguiente matriz columna:

$$A=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix}$$

el orden será: (4,1); cuatro filas y una columna.

1.3.4 Matriz nula o neutra

Es la que tiene todos sus términos nulos. Puede tener cualquier orden:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&.&.&0\\0&0&.&.&0\\.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.\\0&0&.&.&0\end{bmatrix}=[0]$$

1.3.5 Matriz cuadrada

Es la que tiene igual número de filas que de columnas:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\dots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}\rightarrow\ Orden(n)$$

Orden *(n,n)* , pero se suele decir orden *(n)*.

Ejemplo 1.7. Hallar el orden de la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\3&6&0\\2&3&0\end{bmatrix}\rightarrow\ Orden(3)$$

a) *Diagonales de una matriz cuadrada.* Toda matriz cuadrada tiene dos diagonales, una de las cuales es llamada diagonal principal, y la otra diagonal secundaria. En la figura se tendrá:

Diagonal principal Diagonal secundaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Las matrices rectangulares, lógicamente, no tienen diagonales, pero definiremos la diagonal de la mayor matriz cuadrada que contenga y la llamaremos, para entendernos, pseudodiagonal. Esta pseudodiagonal tiene una gran importancia en el cálculo, como tendremos ocasión de comprobar más adelante.

Ejemplo 1.8. Señalar la pseudodiagonal en las matrices *A* y *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 8 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La mayor matriz cuadrada que contiene la matriz *A* es de orden 3, luego la pseudodiagonal será la señalada en la matriz:

Pseudodiagonal

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

De igual forma se obtendrá la pseudodiagonal en la matriz rectangular *B*, esto es:

Pseudodiagonal

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

b) *Traza de una matriz cuadrada*. Es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada:

$$t_r(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} ... + a_{nn}$$

Ejemplo 1.9. Hallar la traza de la *matriz A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

La traza de la matriz A será:

$$t_r\ (A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} ... + a_{nm}$$

1.3.6 Matriz diagonal

Es la matriz cuadrada que solo tiene distintos de cero los elementos de la diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

con a, b y c escalares cualesquiera.

Ejemplo 1.10. Escribir la matriz diagonal cuyos términos son 1, 3, y 4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3.7 Matriz escalar

Es la matriz diagonal cuyos términos son todos iguales entre sí y distintos de cero. En una matriz genérica de orden 3 será:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

donde a es un escalar.

Ejemplo 1.11. Escribir una matriz de orden 3, con el escalar 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3.8 Matriz unidad

Es la matriz escalar cuyo valor es la unidad:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Se denota por I_n con *(n)* igual al orden, es decir:

$$I_1 = [1] \quad ; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

1.3.9 Matriz opuesta

Se dice que una matriz es la opuesta de una matriz dada *A,* y se denota por *(-A),* cuando tiene todos los términos iguales y de signo opuesto.

Ejemplo 1.12. Hallar la matriz opuesta de la siguiente matriz *A*:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz opuesta de la matriz *A* será:

$$-A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

1.3.10 Matriz triangular superior

Se llama matriz triangular superior a toda matriz cuadrada cuyos términos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

1.3.11 Matriz triangular inferior

Se llama matriz triangular inferior a toda matriz cuadrada cuyos términos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

1.4 OPERACIONES CON MATRICES

Las operaciones con matrices que vamos a estudiar son las siguientes:

1. Suma de matrices.
2. Producto de un escalar por una matriz.
3. Producto de matrices.

Veamos cada una por separado.

1.4.1 Suma algebraica de matrices

Para sumar o restar matrices deberán tener el mismo orden y la operación se realizará sumando los términos que ocupan igual posición en las matrices implicadas. En esquema, y utilizando como ejemplo genérico matrices de tercer orden, se tendrá:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 & a_3 \pm b_3 \\ a_4 \pm b_4 & a_5 \pm b_5 & a_6 \pm b_6 \\ a_7 \pm b_7 & a_8 \pm b_8 & a_9 \pm b_9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.13. Hallar la suma de las matrices siguientes:

$$S = A + B - C$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Sumando las matrices quedará:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma algebraica de matrices:

1. **Propiedad asociativa**

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

Ejemplo 1.14. Comprobar, con las matrices del ejemplo anterior y de acuerdo con la propiedad asociativa, la siguiente operación de matrices:

$$(A + B) - C = A + (B - C)$$

1**)** Primera parte de la igualdad $(A + B) - C$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A + B] - C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A + (B - C)$

$$B - C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+(B-C)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Propiedad conmutativa

$$A + B = B + A$$

Ejemplo 1.15. Comprobar esta igualdad con las matrices utilizadas en la anterior propiedad

1) Primera parte de la igualdad $A + B$:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $B + A$:

$$B+A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sinónimos

El elemento neutro es la matriz nula [0].

$$A + 0 = A$$
$$0 + A = A$$

El elemento simétrico es la matriz opuesta *(-A).*

$$A + (-A) = 0$$
$$(-A) + A = 0$$

1.4.2 Producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz A será el producto de dicho escalar por todos y cada uno de los términos de la matriz. Es decir:

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ kb_{21} & kb_{22} & \dots & kb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ kc_{n1} & kc_{n2} & \dots & kc_{nm} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.16. Realizar la operación 3*A*, siendo *A* una matriz de valor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El producto será:

$$3A = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 15 & -12 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.17. Calcular la matriz *C*, sabiendo que:

$$C = 2A - 3B$$

donde*:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operando se tendrá:

$$C = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si se detecta en una matriz que todos sus términos son múltiplos de uno dado, este se podrá sacar factor común.

Ejemplo 1.18. La siguiente matriz A tiene todos sus términos múltiplos de 2, luego sacándolo factor común, quedará:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & 8 & 6\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

Propiedades del producto escalar de una matriz:

1. *Propiedad distributiva del producto* de un escalar por una matriz respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

Ejemplo 1.19 Comprobemos esta propiedad con la matriz *A:*

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

y los escalares 2 y a. Con ello se tendrá:

$$(2 + a)A = 2A + aA$$

1) Primera parte de la igualdad $(2 + a)A$

$$(2+a)A=(2+a)\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+a & -4-2a & 4+2a\\ 0 & 2+a & 0\\ 6+3a & 0 & -4-2a\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $2A + aA$

$$2A+aA=2\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & 0 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & -2a & 2a\\ 0 & a & 0\\ 3a & 0 & -2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+a & -4-2a & 4+2a\\ 0 & 2+a & 0\\ 6+3a & 0 & -4-2a\end{bmatrix}$$

2. *Propiedad distributiva del producto* de un escalar por una matriz respecto de la suma de matrices:

$$\alpha(A + B) - \alpha A + \alpha B$$

Ejemplo 1.20. Comprobemos esta propiedad con $\alpha = 3$y las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $3(A + B)$:

$$3(A+B) = 3\left[\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right] = 3\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -9 \\ 9 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $3A + 3B$:

$$3A + 3B = 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 9 & 15 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -9 \\ 9 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

3. *Propiedad asociativa mixta:*

$$a(bA) = (ab)A$$

Ejemplo 1.21. Al igual que hicimos en los casos anteriores y utilizando las mismas matrices y los mismos escalares comprobaremos esta propiedad con la siguiente expresión:

$$3(aA) = (3a)A$$

1) Primera parte de la igualdad $3(aA)$:

$$3(aA) = 3\left(a\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 2a & 0 & -a \\ 3a & 5a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & 0 & -3a \\ 9a & 15a & 0 \\ 0 & 3a & 3a \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $(3a)A$:

$$(3a)A = (3a)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & 0 & -3a \\ 9a & 15a & 0 \\ 0 & 3a & 3a \end{bmatrix}$$

Por otra parte, se sabe que:

El elemento unidad es el 1: $1A = A$

El elemento neutro es el 0: $0A = 0$

1.4.3 Producto de matrices

Para multiplicar dos matrices será necesario cumplir el siguiente requisito: el número de columnas de la primera matriz deberá ser igual al de filas de la segunda**.** Este requisito en términos de orden será:

$$(m, \underbrace{p)(p}_{iguales}, n) = (m, n)$$

donde el orden de la 1.ª matriz es *(m, p)*, y el de la 2.ª matriz es *(p, n)*. El orden de la matriz resultante será *(m, n)*. Para entender cómodamente el proceso utilizaremos matrices genéricas de tercer orden. Con dichas matrices la operación *AB* será como sigue:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

La primera fila de *A* por todas las columnas de *B* generará la primera fila del producto *AB*:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

La segunda fila de *A* por todas las columnas de *B* generará la segunda fila del producto *AB*:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ a_4b_1 + a_5b_2 + a_6b_3 & a_4c_1 + a_5c_2 + a_6c_3 & a_4d_1 + a_5d_2 + a_6d_3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

La tercera fila de A por todas las columnas de B generará la tercera fila del producto AB:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_7b_1 + a_8b_2 + a_9b_3 & a_7c_1 + a_8c_2 + a_9c_3 & a_7d_1 + a_8d_2 + a_9d_3 \end{bmatrix}$$

En general, se dice que en el producto de dos matrices AB, la matriz A premultiplica a la matriz B y que la matriz B posmultiplica a la matriz A.

Ejemplo 1.22. Comprobar si son multiplicables las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar si son o no multiplicables, se deberá observar que los órdenes de ambas matrices en la disposición AB cumplirán:

$$(6,\underbrace{3)(3}_{iguales},5) = (6,5)$$

es decir, como el orden de la primera es (6,3) y el orden de la segunda es (3,5), serán multiplicables, y el orden de la matriz producto será (6,5). En el caso contrario BA no es posible, dado que no se cumple:

$$(3,\underbrace{5)(6}_{dist\operatorname{int}os},3)$$

De esto se deduce que el producto de matrices no tiene, en general, la propiedad conmutativa, esto es:

$$AB \neq BA$$

El producto de dos matrices permite que las matrices a multiplicar puedan ser tan grandes como se quiera en el sentido señalado en el siguiente esquema:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}^{a} \left.\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}\right\} a$$

Es decir, que mientras se cumpla que el número de columnas de la primera *(a)* sea igual al número de filas de la segunda *(a)*, el producto de matrices podrá ser efectuado.

Ejemplo 1.23. Hallar el producto AB con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El orden de A es (5,3) y el de B es (3,2), luego el orden de la matriz producto será (5,2)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(0)(0) & (1)(-2)+(-1)(1)+(0)(3) \\ (0)(2)+(0)(-1)+(2)(0) & (0)(-2)+(0)(1)+(2)(3) \\ (-2)(2)+(1)(-1)+(1)(0) & (-2)(-2)+(1)(1)+(1)(3) \\ (3)(2)+(1)(-1)+(-2)(0) & (3)(-2)+(1)(1)+(-2)(3) \\ (0)(2)+(3)(-1)+(-3)(0) & (0)(-2)+(3)(1)+(-3)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ -5 & 8 \\ 5 & -11 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

A. Propiedades del producto de matrices:

1. Asociativa:

$$(AB)C = A(BC)$$

Ejemplo 1.24. Comprobemos esta propiedad con las matrices A y B del ejemplo anterior y una nueva matriz C de valor:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(AB)C$. Como AB es un producto conocido, se podrá poner:

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ -5 & 8 \\ 5 & -11 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \\ -5 & -2 \\ 5 & -1 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A(BC)$. En primer lugar, calculemos BC:

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El resultado lo premultiplicamos por A, y queda:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \\ -5 & -2 \\ 5 & -1 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$$

2. **Distributiva.** Existen las dos siguientes propiedades distributivas:

$$(1) \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC$$

Ejemplo 1.25. Comprobemos la propiedad distributiva n.º 1 con las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(A + B)C$. Veamos si se puede efectuar la operación:

$$[(3,3) + (3,3)](3,1) = (3,3)(3,1) = (3,1)$$

sí se puede, luego:

$$(A+B)C=\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & -3\\ 3 & 6 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 8\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $AC + BC$:

$$AC+BC=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 8\end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.26. Comprobemos la propiedad distributiva n.º 2.

Esta segunda operación no se puede realizar con las mismas matrices, ya que el producto de matrices no goza de la propiedad conmutativa, como se observó anteriormente**.** Utilicemos las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}$$

Veamos si se puede efectuar la operación: (3,3)[(3,1)] + (3,1)] = (3,3)(3,1) = (3,1)

Efectivamente se puede, luego procedamos a realizar la operación.

1) Primera parte de la igualdad:

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\45\\8\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad:

$$AB+AC=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\39\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\45\\8\end{bmatrix}$$

3. **Elemento neutro** es la matriz unidad. Cualquier matriz multiplicada por la matriz unidad es ella misma.

$$AI = A$$
$$IA = A$$

B. Matrices conmutables

Se dice que dos matrices *A* y *B* son conmutables si tienen el mismo orden *(m, n)* y cumplen que:

$$AB = BA$$

Ejemplo 1.27. Comprobar si las siguientes matrices son conmutables:

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&4\end{bmatrix}\quad;\quad B=\begin{bmatrix}1&3\\-1&3\end{bmatrix}$$

1) Producto *AB:*

$$AB=\begin{bmatrix}2&3\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&15\\-5&9\end{bmatrix}$$

2) Producto *BA:*

$$BA=\begin{bmatrix}1&3\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&15\\-5&9\end{bmatrix}$$

Luego son conmutables. Dos matrices cuadradas del mismo orden siempre son multiplicables, lo que no quiere decir que sean conmutativas.

Ejemplo 1.28. Comprobar que las siguientes matrices *A* y *B* no tienen la propiedad conmutativa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Producto *AB:*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Producto *BA:*

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

de forma que:

$$AB \neq BA$$

1.5 POTENCIA DE MATRICES

Para elevar una matriz a una potencia, se deberá multiplicar por sí misma tantas veces como indique el exponente. Es decir:

$$A^n = \underbrace{AAA.....A}_{n}$$

Ejemplo 1.29. Hallar la tercera potencia de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicándola tres veces por sí misma se obtendrá:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

1.6 MATRIZ INVOLUTIVA

Se llama matriz involutiva a toda matriz que multiplicada por sí misma da la matriz unidad.

$$AA=I$$

Ejemplo 1.30. Comprobar que la siguiente matriz es involutiva.

$$A=\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar, como la matriz es múltiplo de (1/2), se sacará este factor común y se obtendrá:

$$A=\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación, multiplicándola por ella misma quedará:

$$A^2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+(\sqrt{3})^2 & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & \left(\sqrt{3}\right)^2+1 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 MATRIZ IDEMPOTENTE

Se llama matriz idempotente a toda matriz que multiplicada por sí misma da la misma matriz.

$$A^2=A$$

Ejemplo 1.31. Comprobar que la siguiente matriz es idempotente.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicándola por ella misma quedará:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & -2+1 \\ 4-2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.8 MATRIZ NIHILPOTENTE

Se llama matriz nihilpotente a toda matriz que multiplicada por sí misma da la matriz nula.

$$A^2 = 0$$

Ejemplo 1.32. Comprobar que la siguiente matriz es nihilpotente.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicándola por ella misma quedará:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9 OPERACIONES CON MATRICES PARTICIONADAS EN BLOQUES DE MATRICES

Toda matriz puede ser dividida o particionada en bloques de matrices (trazando líneas discontinuas en su seno), de forma que la matriz resultante quede reducida a otra de un orden menor. Cada elemento de esta nueva matriz es una submatriz elemental. Esta matriz particionada resultante puede ser operada de acuerdo con las reglas generales de la operatoria de matrices. La partición de matrices no es única, dado que se pueden dividir en bloques de diversas formas.

Ejemplo 1.33. Dividir la matriz A de orden (6,5) en bloques de matrices de las siguientes maneras:

1) En una matriz resultante cuadrada de orden (2).

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hdashline 5 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

2) En una matriz resultante rectangular de orden (3,2).

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hdashline 5 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ \hdashline 6 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \\ \hdashline A_{31} & A_{32} \end{array}\right]$$

1.9.1 Suma de matrices particionadas

Para sumar matrices particionadas, los bloques deberán ser elegidos de forma que las matrices resultantes tengan el mismo orden.

Ejemplo 1.34. Sumar las siguientes matrices particionadas A y B.

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 4 \\ \hdashline 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{ccc:c:c} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 4 \\ \hdashline 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

La suma será:

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}$$

Sumando cada uno de los bloques por separado quedará:

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 3 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 12 & -4 & 8 \\ \hdashline 3 & -2 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Con cualquier otra partición coherente hubiese salido el mismo resultado.

1.9.2 Producto de matrices particionadas

Para multiplicar matrices particionadas, se deberá tener en cuenta que las particiones permitan la multiplicación de los bloques. Se aplicará la regla del producto de matrices dada en 1.4.3. Esta forma de operar puede resultar útil cuando multipliquemos grandes matrices.

Ejemplo 1.35. Calcular el producto de las matrices del problema anterior. Particionando coherentemente las matrices A y B en matrices cuadradas de orden 2, quedará:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 1 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

El producto de ambas será:

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

En términos de órdenes de cada submatriz, tendremos:

$$A = \begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, multiplicando en términos de orden quedará:

$$AB = \begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3,2)(2,2)+(3,3)(3,2) & (3,2)(2,3)+(3,3)(3,3) \\ (2,2)(2,2)+(2,3)(3,2) & (2,2)(2,3)+(2,3)(3,3) \end{bmatrix}$$

de donde la matriz resultante será:

$$AB = \begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5,5) \end{bmatrix}$$

Realizando cada subproducto por separado se tendrá:

1)

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

2)

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \\ 21 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3)

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4)

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 16 & -16 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ensamblando los bloques se tendrá:

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 28 & 2 & 20 \\ 6 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 5 & -6 & 21 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 2 & 17 & -13 \\ -2 & 0 & -5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1.10 TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Se llama matriz traspuesta de una dada A a la que se obtiene de cambiar las filas por las columnas o viceversa. Se denota por A^t. El orden de las matrices traspuestas se invierte, es decir, si el orden de A es *(m, n)* el de A^t es *(n, m)*.

Ejemplo. 1.36. Hallar la traspuesta de la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 9 \\ 3 & 8 \\ 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \textit{Orden } (5,2)$$

Cambiando las filas por las columnas se obtiene la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \textit{Orden } (2,5)$$

Propiedades de las matrices traspuestas:

- *1.ª propiedad.* Si se transpone dos veces una matriz A, se obtiene la misma matriz:

$$\left[A^t\right]^t = A$$

La trasposición es una operación involutiva.

- *2.ª propiedad.* La traspuesta de una suma de matrices es la suma de las matrices transpuestas:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

siendo A y B matrices del mismo orden.

Ejemplo 1.37. Comprobemos esta propiedad con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(A + B)^t$

$$(A+B)^t = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A_t + B^t$

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- *3.ª propiedad.* La traspuesta de un producto de matrices es el producto de las matrices transpuestas. En esta operación se invierte el orden de multiplicación de las matrices:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

con A y B matrices multiplicables.

Ejemplo 1.38. Comprobemos esta propiedad con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(AB)^t$:

$$[AB]^t = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $B^t A^t$:

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- *4.ª propiedad*. La traspuesta del producto de un escalar k por una matriz A , es el producto de dicho escalar por la transpuesta de la matriz:

$$(kA)^t = kA^t$$

Ejemplo 1.39. Comprobemos esta propiedad con la siguiente matriz y el escalar 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(kA)^t$

$$(3A)^t = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad kA^t

$$3A^t = 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^t = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1.11 MATRICES SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Se llama matriz simétrica a toda matriz cuadrada que tiene iguales los términos que guardan una posición simétrica respecto de la diagonal principal. Lógicamente los elementos de dicha diagonal pueden ser cualesquiera.

$$
_{M} = \begin{bmatrix} A & a & b & d \\ a & B & c & e \\ b & c & C & f \\ d & e & f & D \end{bmatrix}
$$

Toda matriz simétrica es igual a su traspuesta.

$$
A_{SIM} = A^{t}_{SIM}
$$

Se llama matriz antisimétrica a toda matriz cuadrada que tiene iguales y de distinto signo los términos que guardan una posición simétrica respecto de la diagonal principal. Los elementos de dicha diagonal son nulos.

$$
A_{ANTISIM} = \begin{bmatrix} 0 & -a & b & -d \\ a & 0 & -c & e \\ -b & c & 0 & f \\ d & -e & -f & 0 \end{bmatrix}
$$

Toda matriz antisimétrica es igual a su traspuesta cambiada de signo.

$$
A_{ANTISIM} = -A^{t}_{ANTISIM}
$$

Descomposición de una matriz en suma de una matriz simétrica más una antisimétrica. Toda matriz cuadrada A puede ser descompuesta en suma de una matriz simétrica A_{SIM} y una antisimétrica A_{ANTSIM}. Esta descomposición es única.

$$
A = A_{SIM} + A_{ANTSIM}
$$

donde:

$$
A_{SIM} = \frac{1}{2}\left[A + A^{t}\right] \qquad ; \qquad A_{ANTSIM} = \frac{1}{2}\left[A - A^{t}\right]
$$

Ejemplo 1.40. Descomponer la siguiente matriz A:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}
$$

en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. Según las fórmulas anteriores, se podrá escribir:

$$A_{SIM}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\-3&-2&0\\2&4&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&-2&4\\1&0&-1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-3&3\\-3&-4&4\\3&4&-2\end{bmatrix}$$

$$A_{ANTSIM}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\-3&-2&0\\2&4&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&-2&4\\1&0&-1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&3&-1\\-3&0&-4\\1&4&0\end{bmatrix}$$

Comprobación de la operación:

$$A_{SIM}+A_{ANTSIM}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-3&3\\-3&-4&4\\3&4&-2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&3&-1\\-3&0&-4\\1&4&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&2\\-6&-4&0\\4&8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-3&-2&0\\2&4&-1\end{bmatrix}=A$$

1.12 OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS. NOTACIÓN DE CASTELEIRO

La operatoria de matrices se realizará con las siguientes operaciones:

1. Cambiar de posición dos filas o dos columnas**.** Esto lo representaremos con un arco que señala las dos filas o columnas implicadas.

   Ejemplo 1.41. Cambiar de posición las filas 2.ª y 3.ª y a continuación cambiar las columnas 1.ª por 3.ª en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix}1&1&3&2\\6&6&7&4\\3&8&5&3\\2&14&4&8\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&3&2\\3&8&5&3\\6&6&7&4\\2&14&4&8\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}3&1&1&2\\5&8&3&3\\7&6&6&4\\4&14&2&8\end{bmatrix}$$

2. Multiplicar o dividir cualquier fila o columna por un número o constante cualquiera. Esto lo representaremos introduciendo el número o constante con el que vayamos a operar en un paréntesis.

   Ejemplo 1.42. Multiplicar la primera fila por (-1), la segunda fila por (2) y la cuarta por (1/2), y a continuación multiplicar la segunda columna por (2) y la cuarta por (-3) en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} (-1) \\ (2) \\ \\ (1/2) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (2) & & (-3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 12 & 12 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \simeq \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 6 \\ 12 & 24 & 14 & -24 \\ 3 & 10 & 5 & -9 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número. Esto lo representaremos introduciendo en un paréntesis el número o constante que queramos operar, para a continuación con una flecha acodada indicar a qué fila o columna se lo sumaremos. La flecha acodada siempre indica suma.

   Ejemplo 1.43. Multiplicar la primera fila por (-2) por (3) y por (-1) y sumarla respectivamente a la segunda, tercera y cuarta filas en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} (-1)(3)(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2-2 & -1-2 & 2-6 & -2+4 \\ -3+3 & -1+3 & -3+9 & 4-6 \\ 1-1 & 2-1 & 4-3 & -3+2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Las mismas operaciones se pueden realizar sobre las columnas. Esta propiedad, junto a las anteriores, es la que permite triangular una matriz. Una de las ventajas de esta notación es que con ella es muy fácil repasar los cálculos. Para ver qué operación se ha realizado sobre una determinada matriz, todo lo que hay que hacer es mirar la matriz anterior.

1.13 MATRICES EQUIVALENTES

Una matriz es equivalente a otra cuando se ha obtenido de la anterior por operaciones elementales de filas y columnas.

1.14 FORMA DE OBTENER CEROS EN UNA FILA O COLUMNA DE UNA MATRIZ. MÉTODO DE CASTELEIRO

Para transformar un término de una matriz en un cero, se observarán los dos casos siguientes:

- **1.er Caso. El pivote es un 1.** Se llama *pivote* al término que vamos a utilizar para conseguir transformar un término de una matriz en cero. Cuando el pivote es un 1, bastará aplicar la transformación elemental 3 estudiada en el punto 1.12.

Ejemplo 1.44. Obtener la primera columna de ceros de la matriz siguiente, utilizando como pivote el primer término de la diagonal principal.

Pivote

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Mediante operaciones elementales de filas se obtendrá:

$$(-1)(3)(-2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- **2.º Caso. El pivote es un número cualquiera**. En este caso se puede proceder de cualquiera de las dos formas diferentes siguientes:

  - **1.ª Forma.** Para conseguir hacer ceros en los términos de la primera columna, se multiplicará la primera fila por unas fracciones formadas por el pivote, que constituye el denominador, y los numeradores cada uno de los valores de la primera columna cambiados de signo.

Ejemplo 1.45. Hacer ceros en la primera columna de la siguiente matriz:

Pivote

$$(-4/3)(5/3)(-2/3)\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -13/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 25/3 & 2 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

  - **2.ª Forma.** En esta segunda forma, los ceros en la primera columna se consiguen en dos pasos:

    – 1.er Paso. Se multiplican todas las filas, excepto la del pivote, por dicho pivote, excepto las que sean múltiplos de este.

– 2.º Paso. Se multiplica la primera fila por los valores de la primera columna cambiados de signo (en el ejemplo, (-2), (5) y (-4)) y se suman a cada uno de los valores de las filas correspondiente como indican las flechas acodadas.

Ejemplo 1.46. Hacer ceros en la primera columna de la matriz anterior.

1.^{er} PASO *2.º PASO*

Pivote

$$\begin{array}{c} \\ (3) \\ (3) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \;(-4)(5)(-2)\; \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 & -6 \\ -15 & 15 & -9 & 12 \\ 12 & 6 & 12 & -9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & 0 & -2 \\ 0 & 25 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Conclusión: esta segunda forma parece mejor que la primera, por cuanto no aparecen fracciones en la matriz resultante. Si en la matriz obtenida de la primera forma se multiplican por 3 todas las filas en las que aparecen fracciones, se obtienen los valores de la segunda forma.

1.15 TRIANGULACIÓN DE MATRICES

Triangular una matriz es conseguir un triángulo de ceros, superior o inferior, por medio de operaciones elementales de filas y columnas, utilizando los procedimientos estudiados en el párrafo 1.12. Para ello se trabaja con la diagonal principal, haciendo ceros en todas y cada una de las columnas situadas debajo de la citada diagonal principal, como se explica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.47. Transformar la siguiente matriz *A* en una matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Después de indicar claramente la diagonal principal con una línea de puntos, se empezará el cálculo con el primer valor de dicha diagonal principal que tomaremos como pivote. Operando con transformaciones elementales de filas, se tendrá:

Pivote

$$(-1)(3)(-2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Una vez conseguida la primera columna de ceros, nos fijamos en el segundo valor de la diagonal principal que tomaremos como pivote. Este ha resultado ser un 3 (no es necesario fijarse en el signo, este se ajustará posteriormente). A continuación, lo primero que haremos será multiplicar por dicho pivote las dos últimas filas, de acuerdo con los dos pasos expuestos en el punto 1.14 *2.ª Caso (2.ª Forma).*

1.er PASO

Pivote

$$\begin{array}{c} \\ \\ (3) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Seguidamente multiplicaremos el pivote por los valores de la segunda fila, eso es (2) y (4), y sumándoselas a las filas 3.ª y 4.ª quedará:

2.º PASO

$$(4)(2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 15 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 23 \end{bmatrix}$$

Una vez conseguida la segunda columna de ceros, se procederá a conseguir la tercera. Para ello el pivote será el tercer valor de la diagonal principal (10). Luego tendremos que multiplicar la última fila por dicho pivote y terminar la operación como se indica en el ejemplo.

1.ᵉʳ PASO *Pivote* *2.º PASO*

$$\begin{array}{r}\\ \\ \\ (10)\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 23 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{r}\\ \\ (7)\\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -70 & 230 \end{bmatrix}$$

De donde obtendremos la matriz triangulada superiormente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 216 \end{bmatrix}$$

1.16 CÁLCULO DEL MÁXIMO TRIÁNGULO DE CEROS EN MATRICES RECTANGULARES

Las matrices rectangulares no pueden ser trianguladas, puesto que no poseen diagonal principal, como es lógico, sin embargo, se puede hallar el mayor triángulo posible de ceros utilizando la pseudodiagonal definida en 1.3.5.1, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.48. Hallar el máximo triángulo de ceros en la siguiente matriz rectangular *A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el orden de la matriz es (3,6), el máximo triángulo de ceros será el correspondiente a una matriz cuadrada de orden 3 señalada con una línea de puntos vertical, esto es:

Pivote *Pseudodiagonal* *Pivote*

$$\begin{array}{r}(-2)\\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \simeq \begin{array}{r}\\ (-3)\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

de esta forma se ha obtenido el máximo triángulo de ceros posible. Si la matriz rectangular es vertical, caben dos posibilidades, o se traspone la matriz y se realiza el cálculo como en el problema anterior, o se halla el máximo triángulo de ceros directamente como veremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.49. Hallar el máximo triángulo de ceros en la siguiente matriz rectangular *A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el orden de esta matriz es (6.3), el máximo triángulo de ceros posible es el que se obtiene trazando una línea de puntos horizontal para señalar la máxima matriz de orden 3, como se observa en la figura:

Pivote *Pseudodiagonal* *Pivote* *Pivote*

$$(-2)(-1)(-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \simeq (4)(-1)(7)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \simeq (1)(3/15)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -15 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Está claro que esta última operación es innecesaria porque de cualquier forma resultará:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -15 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Se observa que por debajo de la línea de puntos todos los términos son nulos.

Conclusión. A la vista de estos dos procedimientos se podría afirmar que, siempre que lo permita el problema, se trabaja mejor con la matriz apaisada, porque se realiza un menor número de operaciones.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.1. Hallar la matriz *A* sabiendo que es igual a la matriz *B*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a-2 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & d-1 & 0 \\ 7 & 3-b & c+a & 4 \\ 4 & e+3 & f & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Indicación: igualar los términos que guardan la misma posición relativa.

$$\begin{bmatrix} 1 & a-2 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & d-1 & 0 \\ 7 & 3-b & c+a & 4 \\ 4 & g+3 & f & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a-2=1 & \rightarrow \quad a=3 \\ d-1=3 & \rightarrow \quad d=4 \\ c+a=2 & \rightarrow \quad c+3=2 \quad \rightarrow \quad c=-1 \\ 3-b=0 & \rightarrow \quad b=3 \\ g+3=3 & \rightarrow \quad g=0 \\ f=5 & \end{cases}$$

1.2. Hallar la traza de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

$$T_r(A) = 2+2+3 = 7$$

1.3. Hallar el resultado de la siguiente operación matricial

$$A + B - C$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&4&1\\-3&1&0&1\\3&4&3&1\\5&0&2&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-2&1&-1&1\\4&2&6&2\\0&0&-3&2\\-3&1&0&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\4&6&0&2\\3&2&0&2\\5&0&0&2\end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{bmatrix}1&0&4&1\\-3&1&0&1\\3&4&3&1\\5&0&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&1&-1&1\\4&2&6&2\\0&0&-3&2\\-3&1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0&2\\4&6&0&2\\3&2&0&2\\5&0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&3&0\\-3&-3&6&1\\0&2&0&1\\-3&1&2&-2\end{bmatrix}$$

1.4. Realizar la siguiente operación matricial

$$3\,A + B\,(A + 2\,C)$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&2&0\\3&1&0\end{bmatrix}$$

Solución

$$3\,A + B\,(A + 2\,C) = 3\,A + B\,A + 2\,B\,C$$

$$3\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\2&2&0\\3&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&17&0\\22&20&0\\13&23&3\end{bmatrix}$$

1.5. ¿Es posible realizar las operaciones *AB* y *BA* con las siguientes matrices?

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\3\end{bmatrix}$$

Solución

Sí es posible efectuar las dos operaciones, puesto que el orden de la matriz A es (1,4) y el de la matriz B (4,1), por tanto:

1. Orden de la operación AB: (1,4) (4,1) = (1,1).

Producto:
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

2. Orden de la operación BA: (4,1) (1,4) = (4,4).

Producto:
$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.6. Realizar la siguiente operación matricial

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Orden (AB) = (3,5) (5,3) = (3,3)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.7. Elevar al cubo la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Sacando previamente factor común: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3 = 3^3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^3 = 27\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 243 & 27 & 0 \\ 486 & 162 & 27 \end{bmatrix}$$

1.8. Realizar la siguiente multiplicación de matrices *AB* utilizando bloques

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices son multiplicables, los órdenes son: Orden *(AB)* = (5,7) (7,5)=(5,5).

Indicación: se realiza la siguiente partición de las matrices por bloques:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}$$

Los órdenes de las submatrices y de la matriz resultante serán:

$$\begin{bmatrix} (3,4) & (3,3) \\ (2,4) & (2,3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (4,3) & (4,2) \\ (3,3) & (3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3,3) & (3,2) \\ (2,3) & (2,2) \end{bmatrix} = \left[(5,5)\right]$$

Multiplicación de las submatrices:

1)

$$A_1B_1 + A_2B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 16 \\ 8 & 10 & 8 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

2)

$$A_1B_2 + A_2B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

3)

$$A_3B_1 + A_4B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

4)

$$A_3B_2 + A_4B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje final:

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 16 & 6 & 2 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 7 & 7 & 2 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.9. Hallar los valores *a*, *b* y *c* de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2a & 1 & 1 \\ 2b & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2c & 0 & 0 \\ 2+c & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sabiendo que cumplen la siguiente ecuación matricial:

$$A + B = C$$

donde C es:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2a & 1 & 1 \\ 2b & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 & 0 \\ 2+c & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2c & 0 & 2 \\ 2a+2+c & 2 & 4 \\ 2b+2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicación de coeficientes:

$$2 + 2c = 3 \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

$$2a + 2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad 2a + 2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{5}{4}$$

$$2b + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = -1$$

1.10. Hallar las matrices *A* y *B* que satisfacen el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 3A+2B=C \\ A-B=D \end{cases}$$

donde:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Eliminación de la incógnita A y obtención de la expresión de la incógnita B:

$$\left.\begin{matrix} 3A+2B=C \\ A-B=D \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3A+2B=C \\ -3[A-B]=-3D \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3A+2B=C \\ -3A+3B=-3D \end{matrix}\right\} \rightarrow 5B=C-3D \rightarrow B=\frac{1}{5}[C-3D]$$

Cálculo de B:

$$B=\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \\ -7 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de A:

$$A=D+B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}+\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \\ -7 & -5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1.11. Hallar el valor de la matriz *A* en la siguiente ecuación matricial:

$$A=\left[B^2-C^3\right]^t$$

donde:

$$B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}$$

Solución

Cálculo de B^2:

$$B^2=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

Cálculo de C^3:

$$C^3=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&26\\9&0&10\\39&0&38\end{bmatrix}$$

Cálculo de A:

$$A=\left[\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}25&0&26\\9&0&10\\39&0&38\end{bmatrix}\right]^t=\begin{bmatrix}-21&0&-26\\-9&4&-10\\-39&0&-34\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-21&-9&-39\\0&4&0\\-26&-10&-34\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}21&9&39\\0&-4&0\\26&10&34\end{bmatrix}$$

1.12. Hallar el valor de la matriz *A* en la siguiente ecuación matricial

$$A=\left([BC]^t+[C+B]^t\right)^2$$

donde:

$$B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}$$

Solución

1.ª Forma

$$[BC]^t=\left[\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}\right]^t=\begin{bmatrix}-1&0&3\\6&0&4\\0&0&2\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-1&6&0\\0&0&0\\3&4&2\end{bmatrix}$$

$$[C+B]^t = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right]^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right]^2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 22 & 33 & 30 \\ 10 & 20 & 11 \\ 31 & 52 & 42 \end{bmatrix}$$

2.ª Forma

$$A = \left([BC]^T + [C+B]^T\right)^2 = \left[C^T B^T + C^T + B^T\right]^2$$

$$A = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t\right]^2 = \begin{bmatrix} 22 & 33 & 20 \\ 10 & 20 & 11 \\ 31 & 52 & 42 \end{bmatrix}$$

1.13. Con las matrices *B* y *C* del ejemplo anterior calcular el valor de la matriz *A* en la siguiente ecuación matricial

$$A = \left(\left[B^t C\right]^t + 3\left[C^t - B^2\right]^t\right)^t$$

Solución

1.ª Forma

$$\left[B^t C\right]^t = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right]^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3\left[C^t - B^2\right]^t = 3\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^2\right]^t = 3\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 3 \\ 9 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{bmatrix}2&7&-1\\0&0&0\\4&6&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9&0&6\\0&-12&3\\9&0&-6\end{bmatrix}\right]^t=\begin{bmatrix}-7&7&5\\0&-12&3\\13&6&-6\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-7&0&13\\7&-12&6\\5&3&-6\end{bmatrix}$$

2.ª Forma

$$A=\left(\left[B^tC\right]^t+3\left[C^t-B^2\right]^t\right)^t=\left[C^t\left[B^t\right]^t+3\left[C^t\right]^t-3\left[B^2\right]^t\right]^t$$

$$A=\left[C^tB+3C-3\left[B^2\right]^t\right]^t=\left[C^tB\right]^t+\left[3C\right]^t-\left[3\left[B^2\right]^t\right]^t=B^t\left[C^t\right]^t+3C^t-3\left[\left[B^t\right]^t\right]^2$$

$$A=B^tC+3C^t-3B^2$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\3&0&2\end{bmatrix}^t-3\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-7&0&13\\7&-12&6\\5&3&-6\end{bmatrix}$$

1.14. Descomponer la siguiente matriz en suma de una matriz simétrica más una antisimétrica

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$$

Solución

1. Cálculo de A_{SIM}:

$$A_{SIM}=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}^t\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&2\\-1&2&0\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&1&-1\\1&0&4\\-1&4&0\end{bmatrix}$$

2. Cálculo de $A_{ANTISIM}$:

$$A_{ANTSIM}=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}^t\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&2\\-1&2&0\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A = A_{SIM} + A_{ANTISIM} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.15. Triangular la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$(1)(-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \simeq (4)(-3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \simeq$$

$$\simeq (1/4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \simeq (9)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \simeq (2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -10 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

1.16. Triangular la siguiente matriz rectangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 12 & 12 & 5 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$A = (-2)(-3)(-5)\begin{bmatrix}1&3&2&1\\5&12&12&5\\3&7&7&3\\2&5&5&2\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-3&2&0\\0&-2&1&0\\0&-1&1&0\end{bmatrix} \simeq (-3)(-2)\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&1&0\\0&-2&1&0\\0&-3&2&0\end{bmatrix} \simeq$$

$$\simeq (1)\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Indicación: si se observa que una fila es combinación lineal de otras, esta se puede transformar directamente en una fila de ceros. Así en este problema se cumple que:

4.ª Fila = 2.ª Fila –3.ª Fila

1.17. Hallar el máximo triángulo de ceros en la siguiente matriz rectangular

$$A = \begin{bmatrix}1&0&2&1&0&0&2\\2&1&-3&2&1&1&0\\0&3&-6&3&3&-1&3\\-2&2&-3&1&2&-2&3\end{bmatrix}$$

Solución

Indicación: el orden es (4,7), luego el máximo triángulo de ceros posible viene indicado por la pseudodiagonal señalada en la matriz

Pseudodiagonal

$$A = (2)(-2)\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&2&1&0&0&2\\2&1&-3&2&1&1&0\\0&3&-6&3&3&-1&3\\-2&2&-3&1&2&-2&3\end{array}\right] \simeq (-2)(-3)\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&2&1&0&0&2\\0&1&-7&0&1&1&-4\\0&3&-6&3&3&-1&3\\0&2&1&3&2&-2&7\end{array}\right]$$

$$A \simeq \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & -4 & 15 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$