

Ángeles Cámara Sánchez



MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

EJEMPLOS Y EJERCICIOS RESUELTOS DE ÁLGEBRA Y CÁLCULO



Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa

Ejemplos y ejercicios resueltos de álgebra y cálculo

Madrid, 2026

Ángeles Cámara Sánchez

Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa

Ejemplos y ejercicios resueltos
de álgebra y cálculo

Septiembre, 2026

Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa: Ejemplos y ejercicios resueltos de álgebra y cálculo

Ángeles Cámara Sánchez

Todos los derechos reservados.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo las excepciones previstas por la ley.

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.cedro.org).

© 2026, ESIC Editorial
Avda. de Valdenigrales, s/n
28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid)
Tel.: 91 452 41 00
www.esic.edu/editorial
@EsicEditorial

ISBN: 978-84-1192-271-5
Depósito Legal: M-17567-2026

Diseño de cubierta: Zita Moreno Puig
Maquetación: Santiago Díez Escribano
Lectura: Balloon Comunicación
Impresión: Gráficas Dehon

Un libro de

esic
Editorial

Impreso en España – *Printed in Spain*

Este libro ha sido impreso con tinta ecológica y papel sostenible.

Para mis estudiantes, con la esperanza de que les ayude
a entender las matemáticas e, incluso, a disfrutarlas.

Índice

INTRODUCCIÓN	13
PARTE I. ÁLGEBRA	15
Capítulo 1. Cálculo matricial	17
1.1. Qué es una matriz y para qué sirve	17
1.1.1. Matriz de orden $n \times m$	17
1.1.2. Matrices cuadradas	19
1.2. Suma de matrices	19
1.3. Producto de escalar por matriz.....	20
1.4. Producto de matrices	20
1.5. Matriz transpuesta y matriz simétrica.....	22
1.6. Determinante de una matriz cuadrada	23
1.6.1. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden dos.....	23
1.6.2. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden tres (Regla de Sarrus).....	24
1.6.3. Propiedades.....	25
1.7. Rango de una matriz	29
1.7.1. Definición de menor de orden h	29
1.7.2. Definición de rango de una matriz	30
1.8. Inversa de una matriz	31
1.9. Ecuaciones matriciales	32
1.10. Sistemas de ecuaciones lineales.....	33
1.10.1. Definición de sistema lineal	33

1.10.2. Discusión del sistema.....	33
1.11. Sistemas homogéneos	36
1.12. Ejercicios	37
1.12.1. Ejercicios de cálculo matricial	37
1.12.2. Ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales	40
Capítulo 2. Espacios vectoriales reales	45
2.1. Espacios vectoriales reales	45
2.1.1. Espacio vectorial.....	45
2.1.2. Combinación lineal de vectores.....	46
2.1.3. Dependencia e independencia lineal	46
2.1.4. Propiedades.....	47
2.1.5. Sistema generador y base de un espacio vectorial	47
2.1.6. Teoremas de las bases.....	47
2.1.7. Bases canónicas.....	47
2.1.8. Dimensión de un espacio vectorial	48
2.1.9. Rango de una matriz y espacios vectoriales	48
2.1.10. Aplicaciones prácticas del cálculo del rango	49
2.2. Subespacios vectoriales	49
2.2.1. Observaciones	49
2.2.2. Sistema generador y base de un subespacio vectorial	49
2.2.3. Dimensión de un subespacio vectorial	50
2.2.4. Subespacios vectoriales y sistemas homogéneos	50
2.2.5. Cálculo de una base de un subespacio conociendo sus ecuaciones	51
2.2.6. Cálculo de las ecuaciones cartesianas de un subespacio conociendo una base.....	51
2.3. Ejercicios de espacios vectoriales	52
Capítulo 3. Diagonalización de matrices.....	61
3.1. Transformaciones lineales.....	61
3.1.1. Propiedades.....	61
3.1.2. Expresión matricial de una transformación lineal	61
3.2. Diagonalización de transformaciones lineales.....	63
3.2.1. Cálculo de los autovalores	64
3.2.2. Cálculo del subespacio de autovectores asociados a un autovalor	64
3.3. Procesos secuenciales lineales	65
3.4. Ejercicios de diagonalización de matrices	66

Capítulo 4. Formas cuadráticas reales	77
4.1. Formas cuadráticas reales.....	77
4.1.1. Matriz asociada a una forma cuadrática	77
4.1.2. Cambio de la expresión polinómica a la matricial de una forma cuadrática	78
4.2. Estudio del signo de una forma cuadrática	78
4.2.1. Expresión diagonal de una forma cuadrática.....	79
4.2.2. Estudio del signo de una forma cuadrática por autovalores..	79
4.2.3. Estudio del signo de una forma cuadrática por menores principales.....	80
4.3. Formas cuadráticas restringidas a un subespacio	81
4.3.1. Clasificación de las formas cuadráticas restringidas por el método de sustitución	82
4.4. Ejercicios de formas cuadráticas	83
 PARTE II. CÁLCULO	 89
Capítulo 5. Derivadas de funciones de varias variables	91
5.1. Magnitudes valoradas por una función.....	91
5.1.1. Funciones de varias variables	91
5.1.2. Dominio de una función	92
5.2. Derivadas. Análisis del comportamiento de una función.....	92
5.2.1. Derivadas en funciones reales de una variable	92
5.2.2. Derivadas en funciones reales de varias variables.....	93
5.2.3. Matriz de derivadas parciales primeras	94
5.2.4. Matriz de derivadas parciales segundas	95
5.3. Valoración de magnitudes económicas	96
5.4. Diferenciabilidad	98
5.4.1. Condición suficiente de diferenciabilidad	99
5.5. Optimización de funciones de varias variables	100
5.5.1. Condición necesaria de extremo local	100
5.5.2. Condición suficiente de extremo local	101
5.6. Optimización con restricciones de igualdad	101
5.6.1. Condición necesaria de primer orden.....	102
5.6.2. Condición suficiente de segundo orden	103
5.7. Ejercicios	104

Capítulo 6. Cálculo de primitivas	119
6.1. Primitivas de una función.....	119
6.2. Integral indefinida.....	119
6.3. Métodos de integración	120
6.3.1. Integración inmediata	120
6.3.2. Integración por partes	121
6.3.3. Integración de funciones racionales.....	121
6.3.4. Integración por cambio de variable	123
6.4. Ejercicios	124
Capítulo 7. Integrales definidas	131
7.1. Integrales definidas propias.....	131
7.2. Integral de Riemann	132
7.3. Teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow.....	134
7.4. Integrales definidas impropias	134
7.4.1. Integrales impropias de primera especie (o de intervalo no acotado).....	134
7.4.2. Integrales impropias de segunda especie (o de función no acotada).....	135
7.5. Funciones eulerianas	136
7.5.1. Función gamma	136
7.5.2. Función beta	137
7.6. Ejercicios	138
BIBLIOGRAFÍA.....	143

Introducción

Este manual contiene los fundamentos necesarios para llevar a cabo modelos matemáticos que describan el sistema económico mediante un conjunto de variables, como son las cantidades de los distintos bienes y servicios que se producen y consumen, que se añaden o sustraen de las reservas existentes y que se compran o se venden; junto con los precios a los que se realizan dichas compras y ventas. Una vez que disponemos de las variables explicativas, hemos de tener en cuenta también las cantidades disponibles de recursos naturales y humanos, el estado de los conocimientos tecnológicos y la naturaleza de las preferencias de los consumidores. Estos son los datos que se utilizan en el análisis matemático para explicar las incógnitas, como son los niveles de producción, de empleo, de precios, de inversión, etc.

Para modelizar estas situaciones económicas presentes en el mundo real, actualmente disponemos de instrumentos matemáticos muy potentes, que podemos utilizar fácilmente en nuestras computadoras. Los resultados obtenidos requerirán nuestra interpretación, y para ello necesitamos comprender los fundamentos matemáticos detrás de estos modelos computacionales complejos si no queremos que se conviertan en una caja negra.

Este manual puede ser utilizado para el estudio autónomo por su alto componente práctico, aunque está escrito como complemento al trabajo en el aula (presencial o virtual) de un estudiante universitario de grados del ámbito de la economía y la empresa. Actualmente, los estudiantes disponen de cantidades ingentes de información y de herramientas de inteligencia artificial para tratar dicha información, ante las que se pueden sentir abrumados y perdidos. Por ello, es fundamental que dispongan de manuales como este que, con ayuda del docente, les guíen en su camino hacia el conocimiento.

PARTE I
ÁLGEBRA

1

Cálculo matricial

1.1. Qué es una matriz y para qué sirve. | 1.2. Suma de matrices. | 1.3. Producto de escalar por matriz. | 1.4. Producto de matrices. | 1.5. Matriz transpuesta y matriz simétrica. | 1.6. Determinante de una matriz cuadrada. | 1.7. Rango de una matriz. | 1.8. Inversa de una matriz. | 1.9. Ecuaciones matriciales. | 1.10. Sistemas de ecuaciones lineales. | 1.11. Sistemas homogéneos. | 1.12. Ejercicios.

1.1. Qué es una matriz y para qué sirve

Matriz es el nombre genérico que en matemáticas se aplica a las tablas numéricas. Las matrices se emplean en diferentes disciplinas para almacenar información, para describir relaciones o para el estudio de sistemas de ecuaciones; en concreto, en Ciencias Sociales se trabaja con ellas en Economía, Sociología, Psicología o Estadística.

1.1.1. Matriz de orden $n \times m$

Está formada por un conjunto de elementos dispuestos de modo ordenado en forma de tabla de n filas y m columnas. Se presenta de las siguientes formas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

siendo a_{ij} el término situado en la fila i y la columna j .

Cuando los elementos de la matriz A son vectores, los situaremos en columnas:

$$A = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m)_{1 \times m}$$

siendo c_j el vector-columna formado por los elementos de la columna j (con $j = 1, 2, \dots, m$).

Cuando los elementos de la matriz A son los coeficientes de un sistema de ecuaciones, cada una de las filas de la matriz incluirá los coeficientes de cada una de las ecuaciones que componen el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

siendo f_i el vector-fila formado por los elementos de la fila i (con $i = 1, 2, \dots, n$).

Si $n = 1$, la matriz se denomina *matriz fila*.

Si $m = 1$, la matriz se denomina *matriz columna*.

Una matriz puede contener informaciones muy variadas:

- Resultado de una encuesta realizada a n individuos sobre m preguntas, en la que cada fila es la respuesta de un individuo.
- Una tecnología lineal que emplea n factores en m procesos productivos, en la que cada columna es un proceso productivo.
- Los coeficientes de las incógnitas de un modelo lineal de n ecuaciones y m incógnitas. Cada columna contiene los coeficientes de cada una de las incógnitas.

Ejemplo

$$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \quad \text{Llamando } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

tenemos la expresión matricial $A \cdot X = b$, que en el ejemplo toma la forma $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Podemos ver la utilidad del uso de matrices en el siguiente ejemplo, donde conociendo la cuota de mercado de un cierto grupo de empresas en un año, queremos conocer cuál va a ser la del año siguiente.

Ejemplo

Tres empresas A, B y C comparten en el año actual el mercado de un cierto bien. La empresa A tiene en este momento una cuota de mercado del 20%, B el 60% y C el 20 % restante.

Al año siguiente tienen lugar los siguientes cambios:

- La empresa A conserva solo el 85% de sus clientes, ya que pierde el resto a favor de B (el 5%) y de C (el 10%).
- La empresa B conserva el 55%, perdiendo el 10% que pasa a A y el 35% a C.
- La empresa C logra conservar el 85%, cediendo el 10% a A y el 5% a B.

De estos datos se puede obtener, por un lado, el *vector de cuotas de mercado*, que designaremos por c_0 , una matriz columna cuyas componentes son no negativas y suman 1:

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{y del mismo modo la matriz } T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{pmatrix}$$

donde en cada elemento a_{ij} tenemos la parte de clientes de j que se pasan a i en el periodo siguiente (*matriz de transición*).

Si calculamos el vector $c_1 = T \cdot c_0$, ¿cómo interpretaríamos la solución?

$$c_1 = T \cdot c_0 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,35 \\ 0,40 \end{pmatrix}$$

Vemos que c_1 también es un vector de cuotas de mercado ($0,25 + 0,35 + 0,40 = 1$). Si interpretamos, por ejemplo, su primera componente, vemos que se obtiene de:

$$\underbrace{0,85 \cdot 0,2}_{\text{cuota de mercado que conserva A después de 1 año}} + \underbrace{0,10 \cdot 0,6}_{\text{cuota de A que gana de B}} + \underbrace{0,10 \cdot 0,2}_{\text{cuota de A que gana de C}} = \underbrace{0,25}_{\text{cuota total de A después de 1 año}}$$

y del mismo modo con el resto de las empresas, por eso c_1 es el *nuevo vector de cuotas de mercado después de transcurrido 1 año*, pudiendo hacer lo mismo en años sucesivos.

1.1.2. Matrices cuadradas

Son aquellas en las que el número de filas coincide con el número de columnas, es decir, $n = m$.

En las matrices cuadradas llamamos **diagonal principal** a los elementos en los que los subíndices i y j coinciden:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \text{ forman la diagonal principal de la matriz } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Las matrices cuadradas que tengan nulos los elementos que quedan a uno de los lados de la diagonal principal se denominan **matrices triangulares**. Siendo una matriz **triangular inferior** si son nulos los elementos que quedan por encima de la diagonal principal y **triangular superior** si son nulos los que quedan por debajo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

Matriz diagonal es la que tiene nulos todos los elementos que no estén en la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

1.2. Suma de matrices

La suma de dos matrices del mismo orden $A_{n \times m}$ y $B_{n \times m}$, siendo n el número de filas y m el número de columnas, es la matriz $C_{n \times m}$ que resulta al sumar los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas.

$$C_{n \times m} = A_{n \times m} + B_{n \times m},$$

obteniéndose los elementos de $C_{n \times m}$ de la siguiente forma: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

El elemento neutro de la suma matricial es la *matriz nula*, que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Propiedades

Siendo $A_{n \times m}$, $B_{n \times m}$ y $C_{n \times m}$ matrices del mismo orden y $0_{n \times m}$ la matriz nula del mismo orden, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. Conmutativa: $A + B = B + A$
3. Elemento neutro: $A + 0 = A$
4. Elemento opuesto: $A + (-A) = 0$

Ejemplo

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3. Producto de escalar por matriz

El producto de un escalar k por una matriz $A_{n \times m} = (a_{ij})$ es una matriz $B_{n \times m}$ que se obtiene multiplicando el escalar k por cada uno de los elementos de la matriz $A_{n \times m} = (a_{ij})$

$$k \cdot A_{n \times m} = B_{n \times m} \text{ con } k \in \mathbb{R} \text{ y siendo } b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Ejemplo

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ entonces se verifica que } 4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.4. Producto de matrices

El producto de una matriz A de orden $n \times m$ por una matriz B de orden $m \times p$ es igual a una matriz C de orden $n \times p$, cuyo elemento genérico c_{ij} es el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B de la siguiente forma:

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times p} = C_{n \times p} \text{ siendo } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

Propiedades

Suponiendo conformidad de órdenes (el número de columnas de la primera matriz ha de coincidir con el número de filas de la segunda matriz) entre las matrices A, B y C:

1. Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. No se cumple la propiedad conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

El elemento neutro del producto matricial, cuando las matrices son **cuadradas**, es la *matriz identidad*. Esta matriz está formada por unos en la diagonal principal y el resto de los elementos son iguales a cero.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

El producto matricial no es conmutativo

Podemos observar con este ejemplo que, en general, no se cumple la propiedad conmutativa, es decir, $A \cdot B \neq B \cdot A$, incluso en muchas ocasiones la operación contraria ni siquiera se puede realizar. Ambas situaciones las vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Se verifica que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Podemos observar en este caso que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ejemplo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

Podemos calcular $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, mientras que el producto $B \cdot A$ no se puede realizar al no coincidir el número de columnas de B con el número de filas de A .

Al no ser conmutativo el producto matricial, cuando sacamos factor común hay que tener en cuenta el orden en el que se encuentran las matrices. Si consideramos el producto $A \cdot B$, diremos que A «premultiplica» a B (la multiplica por la izquierda), mientras que B «posmultiplica» a A (la multiplica por la derecha).

Sí que podemos sacar factor común si lo que tenemos es:

$$AB + AC = A(B + C), \text{ o bien } AB + CB = (A + C)B$$

Pero no podemos sacar factor común si lo que tenemos es:

$$AB + CA \neq A(B + C), \text{ o bien } AB + BC \neq (A + C)B$$

1.5. Matriz transpuesta y matriz simétrica

Transpuesta de una matriz A de orden $n \times m$ es la matriz A^t de orden $m \times n$ que se obtiene pasando las filas de A a columnas de A^t y, consecuentemente, las columnas de A a filas de A^t .

$$A \in M_{n \times m} \xrightarrow{\text{Transposición}} A^t \in M_{m \times n}$$

Ejemplo

$$\text{Dada } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Ejemplo

$$\text{Dada } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A es cuadrada y además $a_{ij} = a_{ji}$, la matriz A coincide con A^t . Las matrices que cumplen $A = A^t$ se denominan **matrices simétricas**.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea la matriz $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Se comprueba fácilmente que la matriz S es simétrica, ya que los elementos situados encima y debajo de la diagonal principal son iguales.

1.6. Determinante de una matriz cuadrada

Toda matriz cuadrada A lleva asociado un escalar, que denotaremos por $|A|$ o por (A) . La utilidad del cálculo del determinante no se centra únicamente en conocer su valor numérico, sino en averiguar si es *igual o distinto de cero*, lo que nos permitirá obtener rangos, clasificar vectores y discutir sistemas de ecuaciones. Además, nos servirá para clasificar las matrices cuadradas en dos tipos:

- **Matriz regular:** Se dice que una matriz cuadrada es regular cuando su determinante es distinto de cero.
- **Matriz singular:** Se dice que una matriz cuadrada es singular cuando su determinante es igual a cero.

1.6.1. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden dos

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, matriz cuadrada de orden 2, se verifica que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo

Dada la siguiente matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ se verifica que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$$

1.6.2. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden tres (Regla de Sarrus)

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, matriz cuadrada de orden 3, se verifica que:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

Ejemplo

Dada la siguiente matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ se verifica que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 10$$

En algunos casos, el cálculo del determinante es muy sencillo:

- El determinante de la matriz nula es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- El determinante de la matriz identidad es igual a uno.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

1.6.3. Propiedades

- **Propiedad 1.** El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta.

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Debido a esta propiedad todas las propiedades referidas a las columnas se verificarán también para las filas.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

- **Propiedad 2.** Si una matriz contiene una columna con todos sus elementos iguales a cero, su determinante es cero.

$$\det(c_1, \dots, 0, \dots, c_n) = 0$$

Ejemplo

Como los elementos de la segunda columna son todos nulos, entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \\ -6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

- **Propiedad 3.** Si una matriz tiene dos columnas iguales o proporcionales, su determinante es cero.

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_i, \dots, c_n) = 0 \quad \det(c_1, \dots, c_i, \dots, kc_i, \dots, c_n) = 0$$

Ejemplo

Se verifica que $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ya que la segunda y tercera fila coinciden.

Ejemplo

Se verifica que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, ya que la segunda y tercera columna son proporcionales.

- **Definición de combinación lineal.** Si una columna de una matriz se obtiene sumando los productos de las demás columnas por escalares, diremos que dicha columna es *combinación lineal* de las demás.

$$c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_j \cdot c_j$$

- **Propiedad 4.** Si en una matriz una de las columnas es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) = 0 \text{ si } c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_j \cdot c_j$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0, \text{ dado que la tercera fila es la suma de las dos primeras.}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 20 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que la segunda columna es combinación de la primera y tercera (es igual a la}$$

suma de la primera multiplicada por dos y la tercera multiplicada por cuatro).

$$\begin{vmatrix} 2 & 20 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 4 \\ 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 1 \\ 4 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- **Propiedad 5.** El determinante de una matriz no varía si se le suma a una de las columnas una combinación lineal de las demás.

$$\det(c_1, c_2, \dots, c_n) = \det\left(c_1 + \sum_{i=2}^n k_i \cdot c_i, c_2, \dots, c_n\right)$$

Esta propiedad facilita la resolución de determinantes de orden mayor que tres por el **método de los adjuntos** o por el **método de Gauss**, pues nos permite «hacer ceros» en la matriz para que el cálculo del determinante sea lo más sencillo posible.

- **Definición de menor complementario.** Se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} al determinante que resulta de suprimir en la matriz la fila i -ésima y la columna j -ésima. Se designa por M_{ij} .

Ejemplo

Algunos menores complementarios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ son

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-2} & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & \boxed{3} \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

- **Definición de adjunto.** El *adjunto* del elemento a_{ij} se designa por A_{ij} y es igual a su menor complementario precedido en un signo «+» o un signo «-» en función de la posición del elemento a_{ij} en la matriz.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Podemos observar que los signos van alternando de la siguiente manera:

Si la matriz es de orden tres, los signos correspondientes son $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$,

si la matriz es de orden cuatro, los signos correspondientes son $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$,

y así sucesivamente.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{-6} \\ \boxed{3} & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 2 & -6 \\ 3 & \boxed{0} & 1 & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{1} & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \boxed{-6} \\ 3 & 0 & 1 & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ 2 & 1 & -1 & \boxed{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -20$$

La utilidad de los adjuntos radica en que permiten calcular un determinante de cualquier orden gracias a la siguiente propiedad:

- **Propiedad 6.** El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

Ejemplo

Considerando los adjuntos de los elementos de la primera fila de la matriz, se obtiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

desarrollamos por los elementos
de la primera fila

$$+ (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +2 + (-2)(-12) + (-2)(-4) + (-1)20 = 14$$

Como regla general, para que el número de determinantes que se han de calcular sea el menor posible, conviene elegir la fila o columna que tenga un mayor número de ceros, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & -2 & \boxed{5} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 4 & 1 & \boxed{0} & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot [2 - 12 - (-2) - 6] = -5(-14) = 70$$

desarrollamos por la
tercera columna

Ejemplo

Calculamos el determinante de una matriz de orden cuatro «haciendo ceros» en la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{F_3 = F_3 + 2F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{F_4 = F_4 - 5F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ -9 & -13 & -8 \end{vmatrix} = -32$$

1.7. Rango de una matriz

El cálculo del determinante de una matriz nos informa sobre si dicha matriz es singular o regular, información relevante en el contexto del álgebra lineal, pero solo es posible calcularlo cuando la matriz es cuadrada. Se necesita de un concepto más amplio, válido para matrices de cualquier dimensión.

1.7.1. Definición de menor de orden h

Un menor de orden h es el determinante de la submatriz cuadrada formada por los elementos comunes a h filas y a h columnas de la matriz.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, podemos obtener varios de sus menores de orden 2, como

por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ y a su vez 9 menores de orden 1, que coinciden con cada uno de sus elementos.

1.7.2. Definición de rango de una matriz

Toda matriz A lleva asociado un número natural al que se denomina rango de A y que se designa como $rg(A)$. El rango de una matriz es r si existe algún menor de orden r distinto de cero y todos los menores de orden mayor que r son nulos, es decir, el rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo que existe dentro de una matriz.

Para el **cálculo del rango** se puede utilizar la siguiente regla:

- Se toman las dos primeras columnas y se busca en ellas un menor de orden dos que no sea nulo. Si no lo encontramos, lo buscamos con la primera y la tercera columna y así sucesivamente. Cuando encontremos un menor de orden dos distinto de cero, ya sabemos que el rango es *al menos* 2.
- Para saber si el rango sube a tres, a las columnas que nos han proporcionado un menor de orden dos distinto de cero se les van añadiendo columnas hasta que encontremos un menor de orden tres distinto de cero. Si es así, el rango sube a tres y si no lo encontramos, el rango se queda en dos.
- Si el orden de la matriz lo permite (es mayor que tres), se repite el proceso orlando el menor de orden tres distinto de cero que hemos encontrado con los elementos de una nueva columna, buscando encontrar un determinante de orden cuatro distinto de cero, y así sucesivamente.

Ejemplo

Calculamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Antes de buscar menores distintos de cero, observamos la matriz y buscamos combinaciones lineales.

Vemos que la segunda columna es el doble de la cuarta ($c_2 = 2c_4$), por lo que podemos prescindir de una de ellas a la hora de buscar menores distintos de cero, y ya sabemos que el rango va a ser como mucho igual a tres.

Empezamos por las dos primeras columnas y vemos que ya tenemos un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

por lo que podemos asegurar que, al menos, el rango será 2.

Si orlamos este menor con la tercera columna y la tercera fila no obtenemos un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & \boxed{2} & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

pero si orlamos con la tercera columna y la cuarta fila.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & \boxed{2} & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 24 + 16 + 12 - 24 + 32 \neq 0$$

Podemos asegurar que el rango de A es 3.

Ejemplo

Calculamos el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tomando las dos primeras columnas obtenemos un menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Orlando este menor buscamos algún menor de orden tres distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por lo que el rango de la matriz A es al menos 3.

Para saber si el rango sube a cuatro tenemos que calcular el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 5 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante es igual a cero, entonces el rango de A es 3.

1.8. Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n . Se dice que A^{-1} es la matriz inversa de la matriz A si el producto de ambas matrices es igual a la matriz identidad (I_n).

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

La matriz A será invertible si su determinante es distinto de cero. En caso contrario no será invertible. Así pues, las **matrices regulares** admiten inversa y las **matrices singulares** no admiten inversa.

1.9. Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación en la que la incógnita es una matriz a la que se le suele denominar X .

Para despejar dicha matriz habrá que respetar las propiedades de las operaciones entre matrices, teniendo especial cuidado en la no conmutatividad del producto matricial y en las propiedades de la inversión matricial.

Veamos algunos ejemplos sencillos de ecuaciones matriciales en las cuales debemos despejar la matriz incógnita X , aplicando las propiedades de las matrices expuestas anteriormente.

Ejemplo

Suponiendo que las matrices son invertibles, resolvemos las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX = B$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por A^{-1} (teniendo en cuenta que el producto matricial no es conmutativo, debemos multiplicar en ambos miembros por la izquierda).

$$AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

b) $XA = B$

En este caso debemos multiplicar ambos miembros de la ecuación por A^{-1} , pero ahora por la derecha.

$$XA = B \Rightarrow X \underbrace{AA^{-1}}_I = B A^{-1} \Rightarrow X = B A^{-1}$$

c) $AX + BX = C$

En este caso podemos sacar la incógnita X factor común para después despejarla.

$$AX + BX = C \Rightarrow (A + B)X = C \Rightarrow \underbrace{(A + B)^{-1}(A + B)}_I X = (A + B)^{-1}C$$

$$X = (A + B)^{-1}C$$

d) $AX + X = B$

Sacamos X factor común y después despejamos.

$$AX + X = (A + I)X = B \Rightarrow \underbrace{(A + I)^{-1}(A + I)}_I X = (A + I)^{-1}B$$

$$X = (A + I)^{-1}B$$

1.10. Sistemas de ecuaciones lineales

1.10.1. Definición de sistema lineal

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, pudiéndose expresar mediante su forma algebraica,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o bien en su forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

$$A \cdot X = b$$

Es habitual denominar como:

- *coeficientes del sistema* a los elementos a_{ij}
- *términos independientes* a los elementos b_i
- *incógnitas* a las variables x_j

El estudio o análisis de este tipo de sistemas se suele realizar en dos fases:

- Discusión del sistema:* En esta fase se comprueba si el sistema tiene solución, es decir, si existen o no valores reales de las incógnitas que verifiquen la igualdad de todas y cada una de las ecuaciones. En caso afirmativo, se debe averiguar si el sistema tiene una sola solución (*solución única*) o tiene infinitas soluciones (*solución múltiple*).
- Resolución del sistema:* Método mediante el cual se encuentra dicha solución, ya sea única o múltiple.

1.10.2. Discusión del sistema

Para la discusión de un sistema de ecuaciones $A \cdot X = b$ nos apoyaremos en el cálculo del rango de las dos siguientes matrices: la matriz A formada por los coeficientes del sistema y la matriz A^* o A/b (*matriz ampliada*), que se obtiene a partir de la matriz A añadiéndole como última columna el vector de términos independientes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Dado el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = b$, con m ecuaciones y n incógnitas, se verifica que:

- Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ entonces el sistema no tiene solución y diremos que es *incompatible*.
- Si $rg(A) = rg(A^*) = r$ entonces el sistema posee solución y diremos que es *compatible*. En este caso podemos distinguir:
 - Si $rg(A) = rg(A^*) = r = n$ entonces el sistema tiene una única solución y diremos que es *compatible determinado*.
 - Si $rg(A) = rg(A^*) = r < n$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones y diremos que es *compatible indeterminado*.

Con base en el teorema anterior, podemos hacer las siguientes apreciaciones:

- En caso de que el sistema sea incompatible, podemos decir que la información que recoge el sistema es *incoherente*.
- En caso de que el sistema sea compatible, cuando $r < m =$ número de ecuaciones, entonces $m-r$ es el número de ecuaciones redundantes y estas ecuaciones recogen la misma información que las r ecuaciones independientes. Para la resolución del sistema, las $m-r$ ecuaciones dependientes o redundantes pueden ser eliminadas.
- Si el sistema además es compatible indeterminado, $n-r$ será el número de parámetros o variables libres (que pueden tomar cualquier valor real) y r será el número de variables dependientes en la solución del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$$

En formato matricial tenemos $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 = \text{número de incógnitas.}$$

Se trata de un sistema compatible determinado de solución $x = 2$; $y = 3$.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

En formato matricial tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 1 < \text{número de incógnitas.}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado de solución $x = 1 - t$; $y = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

En formato matricial tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow \text{Se trata de un sistema incompatible.}$$

Ejemplo

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = r = n = 3 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado siendo:

$$\begin{aligned} n - r &= 3 - 3 = 0 \text{ variables libres} \\ m - r &= 3 - 3 = 0 \text{ ecuaciones redundantes} \end{aligned}$$

Solución:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{5}{2}, \quad z = -1$$

Ejemplo

Discutimos y resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ x - y + 5z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Tomando las dos primeras filas y columnas formamos un menor de orden dos no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

Si tomamos las tres primeras filas, el menor de orden 3 es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Comprobemos que el menor formado por las dos primeras ecuaciones y la cuarta es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Para calcular el rango de la matriz ampliada tenemos que calcular el único menor de orden 4 posible.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

Por lo tanto, al ser $rg(A^*) = rg(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible determinado (solución única).

Dado que el menor de orden tres distinto de cero está formado por las dos primeras filas y la cuarta, podemos asegurar que la tercera ecuación es redundante, y para encontrar la solución del sistema podemos suprimir dicha ecuación y resolver el sistema equivalente.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ \boxed{x - y + 5z = 3} \\ x + y - 3z = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Sistemas equivalentes}} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ x + y - 3z = 1 \end{array} \right.$$

Solución:

$$x = 2 \quad y = -1 \quad z = 0$$

1.11. Sistemas homogéneos

Definición de sistemas homogéneos. Se denominan sistemas homogéneos a aquellos en los que los términos independientes son cero, es decir:

$$AX = 0$$

Resulta inmediato comprobar que estos sistemas son **siempre compatibles**, ya que $rg(A) = rg(A^*)$, al ser el vector de términos independientes nulo.

Podemos distinguir entre dos posibles soluciones:

$$a) rg(A) = rg(A^*) = r = n \Rightarrow$$

Sistema compatible determinado, con solución única $X = (0,0, \dots 0)$

$$b) \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r < n \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones, incluida la trivial $X = (0,0, \dots 0)$

Ejemplo

En el siguiente sistema
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que el rango ya es al menos dos, al ser el menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Calculemos para qué valores el determinante de la matriz A es nulo.

$$|A| = -2 + 3a - 15 + 9 - 2a + 5 = a - 3 \Rightarrow |A| = a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Por tanto, al ser un sistema homogéneo se verifica que el rango de A^* coincide con el rango de A, por lo que podemos concluir que:

Si $a \neq 3 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r = 3 = n \Rightarrow S. C. D$ con solución trivial $x = y = z = 0$.

Si $a = 3 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r = 2 < n \Rightarrow S. C. I$ con infinitas soluciones, incluida la trivial.

Resolvemos este último caso:

Tenemos una variable libre, pues $n - r = 3 - 2 = 1$,

y una ecuación redundante, pues $m - r = 3 - 2 = 1$.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \text{ es un sistema equivalente.}$$

Y resolviendo el sistema obtenemos que $x = \frac{-2z}{3}$; $y = \frac{z}{3}$.

Por lo tanto, las infinitas soluciones son de la forma $\left(\frac{-2t}{3}, \frac{t}{3}, t\right)$, con $t \in \mathbb{R}$, donde también está incluida la solución trivial.

1.12. Ejercicios

1.12.1. Ejercicios de cálculo matricial

1.1. Efectúe los siguientes productos matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 13 & -11 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -10 & 23 & 13 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$$

1.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, compruebe

que no se cumple la propiedad conmutativa, es decir, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 26 & -20 & 10 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 24 & -15 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

1.3. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -5$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad |B| = 15$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad |C| = -6$$

$$d) D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad |D| = 4$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |E| = 6$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad |F| = 6$$

1.4. Calcule para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ son invertibles las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 2-a & a \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

$$|A| = (2-a)2a - a - 2a(1-a) = 4a - 2a^2 - a - 2a + 2a^2 = a$$

Tiene inversa para $a \neq 0$.

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|B| = 1 - a$$

Tiene inversa para $a \neq 1$.

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|C| = a^3 - a^2 - a + 1 = (a - 1)^2(a + 1)$$

Tiene inversa para $a \neq 1, -1$.

1.5. Averigüe el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(B) = 1$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(C) = 3$$

1.6. Calcule el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$|A| = -6 + 4a - 6 + 4a = 8a - 12$$

$$\text{Entonces, } rg(A) = \begin{cases} 2, & \text{si } a = \frac{12}{8} \\ 3, & \text{si } a \neq \frac{12}{8} \end{cases}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = 2c_1 \quad y \quad c_3 = 3c_1 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2a = 2(4 - a)$$

$$\text{Entonces, } rg(B) = \begin{cases} 2, & \text{si } a \neq 4 \\ 1, & \text{si } a = 4 \end{cases}$$

1.12.2. Ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales

1.7. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el **método de igualación**:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

Despejamos la misma variable en ambas ecuaciones y las igualamos:

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 3y}{4} \\ x = 7y + 9 \end{cases} \rightarrow \frac{11 + 3y}{4} = 7y + 9$$

Nos queda una ecuación con una sola variable:

$$11 + 3y = 28y + 36; \quad -25y = 25; \quad y = -1 \rightarrow x = 2$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ 7x - 3y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20 - 4y}{2} \\ x = \frac{19 + 3y}{7} \end{cases} \rightarrow \frac{20 - 4y}{2} = \frac{19 + 3y}{7}$$

$$10 - 2y = \frac{19 + 3y}{7}; \quad 70 - 14y = 19 + 3y; \quad 51 = 17y \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 4$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - 8y = -7 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-7 + 8y}{3} \\ x = -2y \end{cases} \rightarrow \frac{-7 + 8y}{3} = -2y; \quad -7 + 8y = -6y; \quad -7 = -14y; \quad y = \frac{1}{2}; \quad x = -1$$

1.8. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 8x - 6y = 12 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$$

Despejamos una de las dos variables en una de las ecuaciones y la sustituimos en la otra ecuación:

$$x = \frac{12 + 6y}{8} \rightarrow 3\left(\frac{12 + 6y}{8}\right) + 4y = -8 \rightarrow \frac{36 + 18y}{8} + 4y = -8$$

$$\frac{36 + 18y + 32y}{8} = -8; \quad 36 + 50y = -64; \quad y = -2; \quad x = 0$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ -4x + y = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{14 - 4y}{2} = 7 - 2y; \quad -4(7 - 2y) + y = -1; \quad -28 + 8y + y = -1; \quad -28 + 9y = -1; \quad 9y = -27 \Rightarrow y = -3; \quad x = 1$$

$$c) \begin{cases} x + 8y = 0 \\ 8x - 4y = -15 \end{cases}$$

$$x = -8y \rightarrow 8(-8y) - 4y = -15; \quad -68y = -15; \quad y = \frac{15}{68}; \quad x = -\frac{30}{17}$$

1.9. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 7y = 15 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por dos, nos queda el siguiente sistema equivalente al anterior:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 & (\times 2) \\ 4x - 7y = 15 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones: $13y = -13; y = -1; x = 2$.

$$b) \begin{cases} 3x - 6y = 39 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por dos: $\begin{cases} 3x - 6y = 39 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$

y en este caso sumamos ambas ecuaciones: $5x = 35; x = 7; y = -3$.

$$c) \begin{cases} -2x - 6y = -12 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por tres medios:

$$\begin{cases} -3x - 9y = -18 & (\times 3/2) \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \text{ y sumamos ambas ecuaciones: } -5y = -10; y = 2; x = 0$$

1.10. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas por los **tres métodos**: igualación, sustitución y reducción.

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 17 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

Igualación: $\begin{cases} x = \frac{17+2y}{3} \\ x = \frac{-6-3y}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{17+2y}{3} = \frac{-6-3y}{2} \rightarrow 34 + 4y = -18 - 9y; \quad y = -4; \quad x = 3.$

Sustitución: $x = \frac{17+2y}{3} \rightarrow 2\left(\frac{17+2y}{3}\right) + 3y = -6; \quad 34 + 4y + 9y = -18; \quad y = -4; \quad x = 3.$

Reducción: $\begin{cases} 3x - 2y = 17 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 17 \\ 3x + \frac{9}{2}y = -9 \quad (\times 3/2) \end{cases}$

y restamos ambas ecuaciones: $\frac{13}{2}y = -26; \quad y = -4; \quad x = 3.$

$$b) \begin{cases} 3x + 7y = 12 \\ 4x - 4y = 16 \end{cases}$$

Igualación: $\begin{cases} x = \frac{12-7y}{3} \\ x = \frac{16+4y}{4} = 4 + y \end{cases} \rightarrow \frac{12-7y}{3} = 4 + y \rightarrow 12 - 7y = 12 + 3y \rightarrow y = 0; \quad x = 4.$

Sustitución: $x = \frac{12-7y}{3}; \quad 4\left(\frac{12-7y}{3}\right) - 4y = 16 \rightarrow 48 - 28y - 12y = 48 \rightarrow y = 0; \quad x = 4.$

Reducción: $\begin{cases} 3x + 7y = 12 \\ 4x - 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 7y = 12 \\ 3x - 3y = 12 \quad (\times 3/4) \end{cases}$

Sumamos ambas ecuaciones: $4y = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = 4.$

$$c) \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Igualación: $\begin{cases} x = \frac{-6y}{2} = -3y \\ x = 2 - 2y \end{cases} \rightarrow -3y = 2 - 2y; \quad y = -2; \quad x = 6.$

Sustitución: $x = \frac{-6y}{2} = -3y \rightarrow (-3y) + 2y = 2 \rightarrow y = -2; \quad x = 6.$

Reducción: $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x + 2y = 2 \quad (\times 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$

Restamos ambas ecuaciones: $2y = -4 \rightarrow y = -2; \quad x = 6.$

1.11. Discuta los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y resuelva cuando sea posible.

$$a) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = -2 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n$, por lo que es un sistema compatible determinado, de solución única:

$$x = 1; y = 1; z = 1$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - y + z = 0 \\ 4x + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Tenemos que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = -4 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n$, por lo que es un sistema compatible determinado, de solución única:

$$x = 1; y = 1; z = -2$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{Tenemos que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 2 \text{ porque } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$rg(A^*) = 2 \text{ porque } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado de infinitas soluciones.

$$\text{Sumando las dos primeras ecuaciones obtenemos } 3x + 2z = 7 \rightarrow z = \frac{7-3x}{2}.$$

$$\text{Despejando en la segunda ecuación obtenemos } y = 2x + z - 4 \rightarrow y = 2x + \frac{7-3x}{2} - 4 = \frac{x-1}{2}$$

$$\text{La solución es: } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t-1}{2} \\ z = \frac{7-3t}{2} \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

1.12. La función de costes C de una empresa puede expresarse en función de la cantidad producida q . Según los datos históricos de la empresa, esta función se puede aproximar mediante un polinomio de segundo grado $C(q) = a + bq + cq^2$. Si sabemos que para producciones de 1, 2 y 3 unidades físicas los costes asociados son 5, 15 y 45 unidades monetarias, escriba en forma matricial el sistema de ecuaciones y encuentre la función de costes.

Sustituyendo q por las cantidades 1, 2 y 3 obtenemos las tres filas del siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a = 15$; $b = -20$; $c = 10$.

Por lo tanto, la función de costes de la empresa es $C(q) = 15 - 20q + 10q^2$.